حل مسائل في الجملة المكافئة

م.غيث برهاني

التحريك

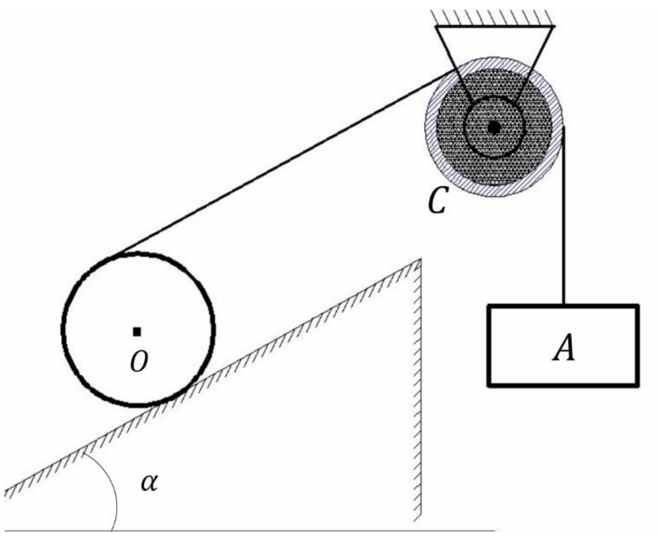
عملي 10 10 S.P 35

4/12/2015

RBC HAMAK

فريق الكريّات الحمراء التطوعي

المسألة الأولى:



يمرر سلك إلى بكرة C مهملة حيث يعلق في احد طرفيه جسم A كتلته m ويعلق في طرفه الآخر قرص كتلته M ونصف قطره R,عزم عطالته $I_O = \frac{1}{2}M.R^2$ فإذا بدأ الجسم A حركته من السكون نحو الأسفل,المطلوب:

1) أوجد تسارع كل من أجزاء الجملة والقوى المؤثرة عليهم.

2) شرط الحركة المفروضة.

الحل:

لإيجاد تسارعات أجزاء الجملة والقوى المؤثرة عليها نختار تطبيق علاقات المجموعة المكافئة على أجزاء الجملة...بتطبيقها على الجسم الأول المتمثل بالقرص المتحرك حركة مستوية عامة.

$$M.\overrightarrow{A_O} = \Sigma\overrightarrow{F_O^e} \ldots(1)$$

$$I_O.\vec{E} = \Sigma\overrightarrow{M_O^e} \ldots(2)$$

لتوضيح العلاقتين نرسم مخططاتها:



بإسقاط العلاقة(1):

$$M.A_O = T - F_\tau - M.g.sin\alpha \dots 1$$

$$0 = N - M.g.cos\alpha \dots 2$$

وبأخذ العزوم حول المركز O من العلاقة(2):

$$\varepsilon.I_O = F_\tau.R + T.R \dots 3$$

وبتطبيق العلاقات على الجسم الثاني المتمثل بالجسم A المتحرك حركة انسحابية:

$$m.\overrightarrow{A_A} = \Sigma\overrightarrow{F_A^e} \dots (3)$$

$$0 = \Sigma\overrightarrow{M_A^e}$$

ولتوضيح العلاقات نرسم مخططاتها:



بإسقاط العلاقة (3):

$$m.A_A = m.g - T \dots 4$$

من 2 :

$$N = m.g.cos\alpha \dots \acute{1}$$

بتقسيم العلاقة 3 على R :

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}M.R\right) = F_\tau + T \dots 5$$

بما أن الحبل لايمتط:

$$A_A = A_D$$

ومن حركة القرص التدحرجية:

$$A_D = \varepsilon(2R)$$

$$A_O = \varepsilon.R$$

بضرب العلاقة 4 بـ 2 :

$$2m(2R\varepsilon) = 2m.g - 2T \dots 6$$

وبجمعها مع 5 :

$$4m.R.\varepsilon + \frac{1}{2}M.R.\varepsilon = 2m.g + F_\tau - T$$

وبجمعها مع المعادلة (2):

$$4m.R.\varepsilon + \frac{1}{2}M.R.\varepsilon + M.R.\varepsilon = 2m.g - M.g.sin\alpha$$

$$\Rightarrow \left(4m + \frac{3}{2}M\right)R.\varepsilon = g(2m - M.sin\alpha)$$

$$\acute{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{g}{R}\frac{(2m - M.sin\alpha)}{\left(4m + \frac{3}{2}M\right)} = \frac{2g}{R}\frac{(2m - M.sin\alpha)}{(8m + 3M)}$$

ومنه:

$$A_D = A_A = 2.\varepsilon.R = 4g\frac{(2m - M.sin\alpha)}{(8m + 3M)} \quad \acute{3}$$

وأيضا:

$$A_O = 2g\frac{(2m - M.sin\alpha)}{(8m + 3M)} \quad \acute{4}$$

ومن 4 :

$$T = m.g - m.A_A = m.g - 4m.g\frac{2m - M.sin\alpha}{8m + 3M} \quad \acute{5}$$

$$F_t = mg\ (2m - \frac{Msin\alpha}{8m+3M}$$

شرط الحركة :

$$A_A > 0$$
$$2m > M.\sin\alpha$$
$$\frac{2m}{M} > sin\alpha$$

المسألة الثانية:

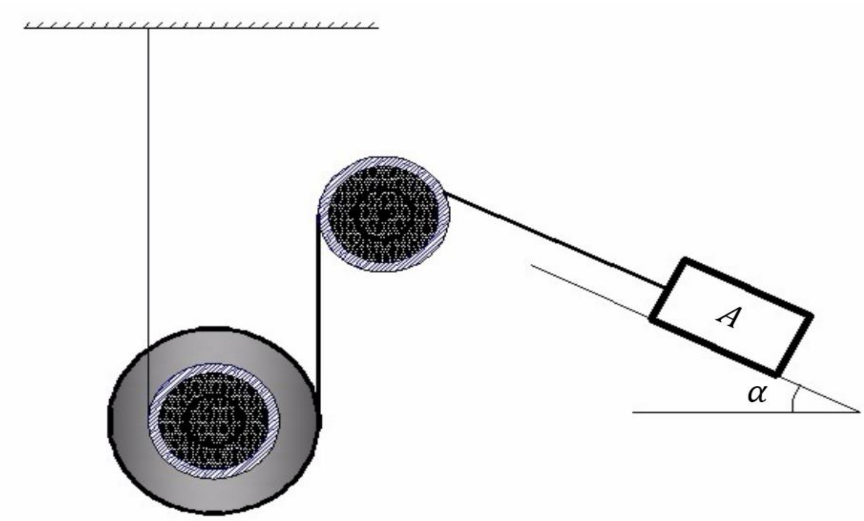
قرص مزدوج $2R, R$ متجانس عزم عطالته حول مركزه الهندسي $I_O = \frac{1}{2}M.R^2$

وجسم A كتلته m قابل للانزلاق على سطح خشن معامل احتكاكه μ مائل على الأفق بزاوية α

مرتبطان مع بعضهما بسلك غير قابل للتمدد عبر بكرة مهملة,فإذا انزلق الجسم من السكون نحو الأسفل

فأوجد:1) التسارعات والقوى.

2) شرط الحركة المفروضة.

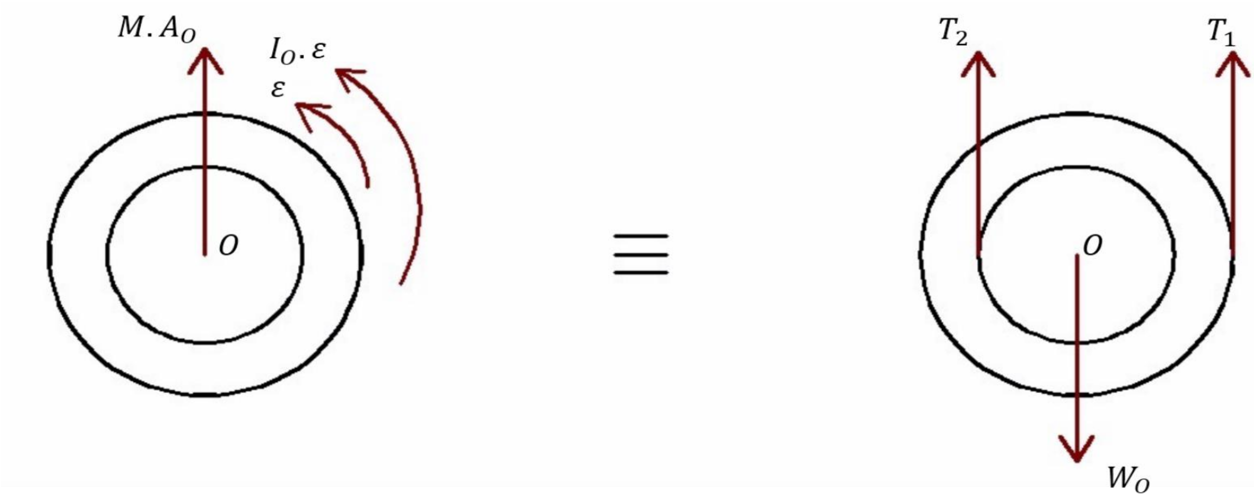


الحل:

لإيجاد القوى المؤثرة على الجملة وتسارعات اجزائها نختار تطبيق علاقات المجموعة المكافئة على أجزاء الجملة...وبتطبيقها على الجسم الأول المتمثل بالقرص المتحرك حركة مستوية عامة:

$$M.\overrightarrow{A_O} = \Sigma\overrightarrow{F_O^e} \ldots(1)$$
$$I_O.\vec{E} = \Sigma\overrightarrow{M_O^e} \ldots(2)$$

برسم مخططات العلاقة:



مجموعة القوى الفعالة — مجموعة القوى المكافئة

بإسقاط(1): $M.A_O = T_2 + T_1 - W_O \dots 1$

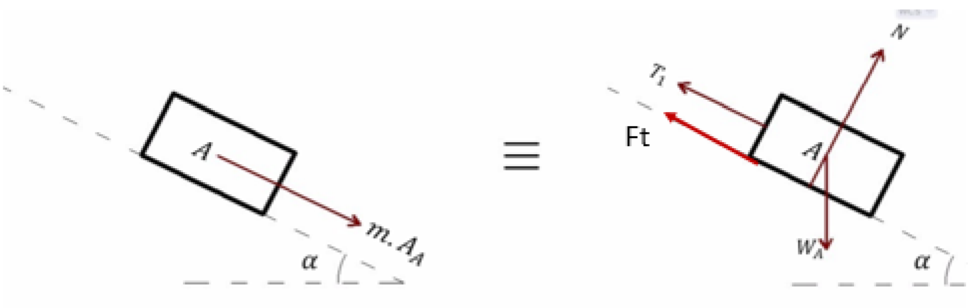
وبأخذ العزوم حول O : $I_O.\varepsilon = -T_2.(R) + T_1(2R) \dots 2$

بتطبيقها على الجسم الثاني المتمثل بالجسم A المتحرك حركة انسحابية على المستوي المائل الخشن:

$$m.\overrightarrow{A_A} = \Sigma\overrightarrow{F_A^e} \dots (3)$$

$$0 = \Sigma\overrightarrow{M_A^e}$$

ولتوضيح العلاقتين نرسم مخططاتها:



مجموعة القوى الفعالة — مجموعة القوى المكافئة للقوى الفعالة

$$m.A_A = -T_1 - F_\tau + m.g.sin\alpha \dots 3$$

$$0 = N - m.g.cos\alpha \dots 4$$

من 4 : $N = m.g.cos\alpha \ldots \acute{1}$

ومن شرط الانزلاق: $F_\tau = \mu.N = \mu.m.g.cos\alpha \ldots \acute{2}$

بما أن الحبل لايمتط: $A_A = A_B = \varepsilon.3R \ldots 5$

من حركة القرص المستوية العامة:

$$A_O = \varepsilon.(R) \ldots 6$$
$$A_O = \frac{1}{3}A_A$$

$$A_A = \frac{3}{9m + 2m}[\,3mg\ sin\alpha - \mu cos\alpha + Mg\,]\}$$

$$A_o = \frac{1}{9m + 2m}[\,3mg\ sin\alpha - \mu cos\alpha + Mg\,]\}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{R(9m + 2m)}[\,3mg\ sin\alpha - \mu cos\alpha + Mg\,]\}$$

$$T_1 = \frac{1}{9m + 2M}[2Mmg(cos\alpha - \mu cos\alpha) + 3mMg]$$

$$T_2 = \frac{1}{9m + 2M}[Mmg(sin\alpha - \mu cos\alpha) + M.g(6mMg]$$

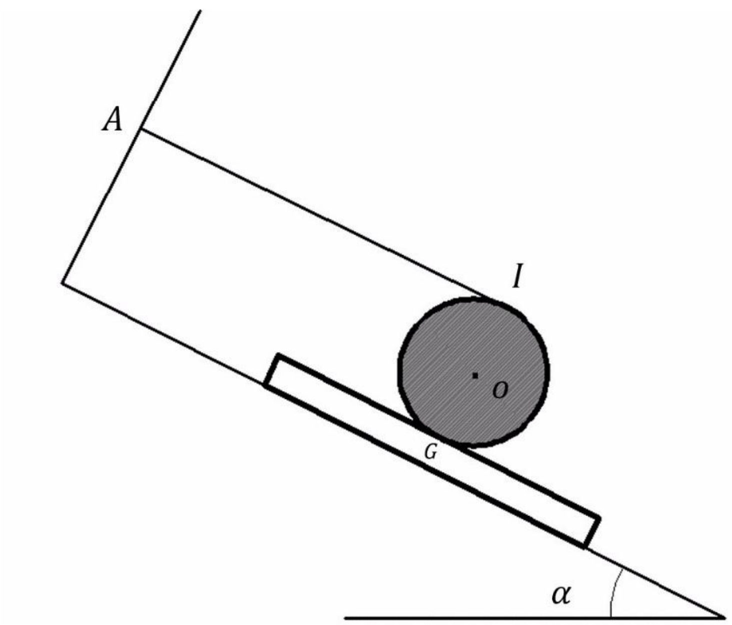
شرط الحركة :

$$A_A > 0$$
$$sin\alpha - \mu cos\alpha > \frac{Mg}{3mg}$$

المسألة الثالثة:

يلف خيط حول قرص دائري كتلته m،نصف قطره R،عزم عطالته حول مركزه الهندسي $I_O = \frac{1}{2}m.R^2$

طرفه الآخر مثبت بجدار A يستند القرص على السطح الخشن المتمثل بلوح كتلته M يستند بدوره على



مستو خشن معامل احتكاكه f مائل بزاوية α عن الأفق.تبدأ الحركة من السكون بانزلاق اللوح نحو الأسفل بتدحرج القرص عليه والمطلوب:

1) أوجد تسارعات أجزاء الجملة والقوى المؤثرة عليها.

2) أوجد شرط الحركة المفروضة.

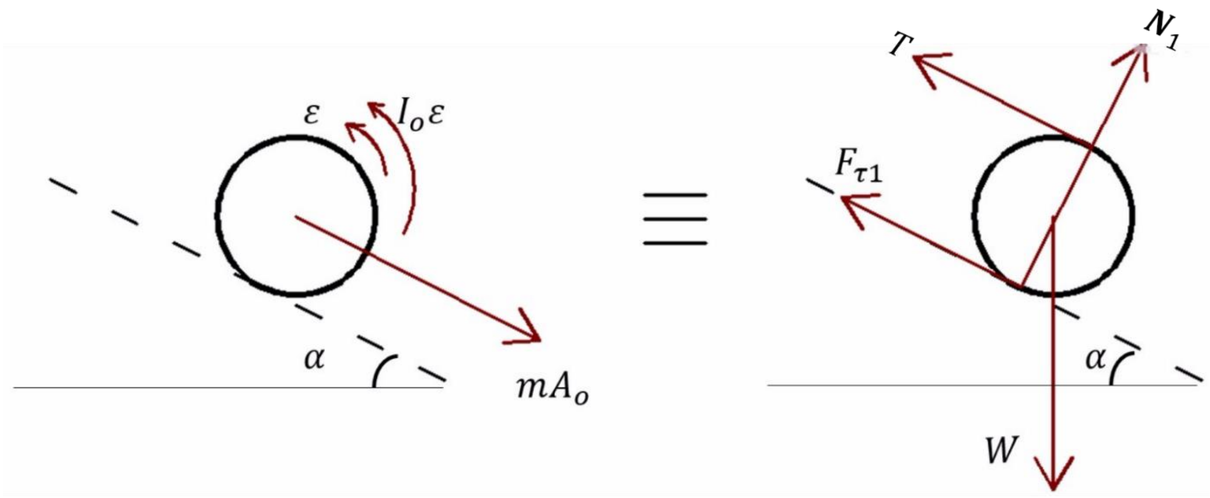
الحل:

لإيجاد تسارعات اجزاء الجملة والقوى المؤثرة عليها نختار تطبيق علاقات المجموعة المكافئة على الجملة بتطبيقها على القرص المتحرك حركة مستوية عامة:

$$M.\overrightarrow{A_O} = \Sigma\overrightarrow{F_O^e} \dots (1)$$

$$I_O.\vec{E} = \Sigma\overrightarrow{M_O^e} \dots (2)$$

لتوضيح العلاقتين نرسم مخططاتها:



المجموعة المكافئة للقوى الفعالة　　　　مجموعة القوى الفعالة

بإسقاط العلاقة (1):

$$m.A_O - T - F_{\tau_1} + m.g.sin\alpha \dots 1$$

$$0 = N_1 - m.g.cos\alpha \dots 2$$

ومن العلاقة(2):

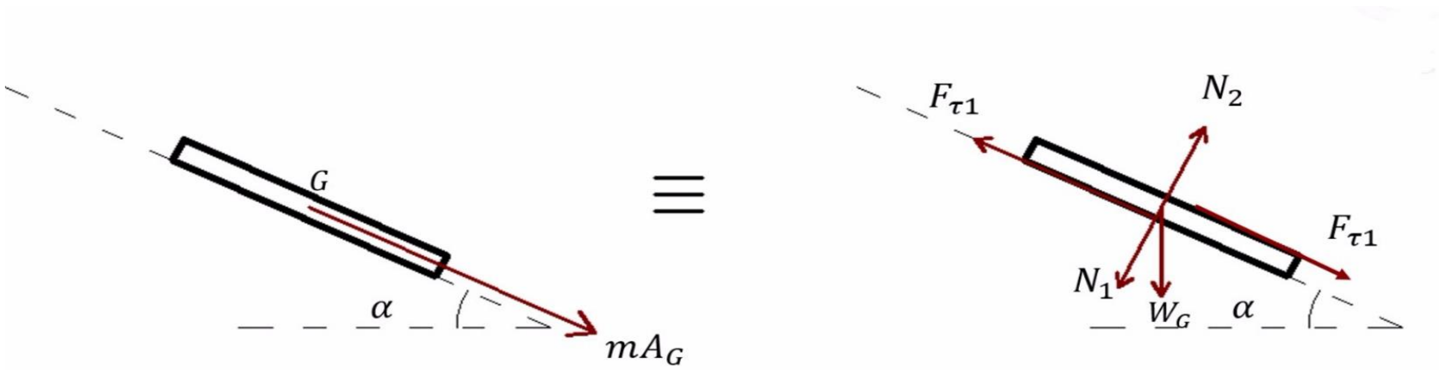
$$I_O.\varepsilon = T.R - F_{\tau_1}.R \dots 3$$

وبتطبيق علاقة المجموعة المكافئة على الجسم الثاني المتمثل باللوح المتحرك حركة انسحابية:

$$m.\overrightarrow{A_A} = \Sigma\overrightarrow{F_A^e} \dots (3)$$

$$0 = \Sigma\overrightarrow{M_A^e} \dots (4)$$

لتوضيح العلاقتين نرسم مخططاتها:



المجموعة المكافئة للقوى الفعالة　　　　مجموعة القوى الفعالة

بإسقاط العلاقة (3):

$$M.A_B = F_{\tau_1} - F_{\tau_2} + M.g.sin\alpha \dots 4$$

$$0 = N_2 - N_1 - M.g.cos\alpha \dots 5$$

من 2 :

$$N_1 = m.g.cos\alpha \dots \acute{1}$$

من 5 :

$$N_2 = m.g.cos\alpha + M.g.cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad N_2 = (m+M)g.cos\alpha \dots \acute{2}$$

ومن شرط انزلاق B:

$$F_{\tau_2} = f.N_2 = (m+M)f.g.cos\alpha \dots \acute{3}$$

$$A_B = A_G \dots$$

من حركة القرص المستوية العامة:

$$A_O = \varepsilon.(R) \dots 7$$

$$A_B = \varepsilon.(2R) \dots 6$$

$$\varepsilon = \frac{2}{R(9m+8M)} .[sin\alpha(mg+2Mg) - 2fcos\alpha + (mg+Mg)]$$

$$A_B = A_G = 2\varepsilon.R = \frac{4}{R(9m+8M)} .[sin\alpha(mg+2Mg) - 2fcos\alpha + (mg+Mg)]$$

$$A_O = \frac{4}{(5m+8M)} \cdot [sin\alpha(mg+2Mg) - 2f cos\alpha + (mg+Mg)]$$

$$T = \frac{1}{4}(4M+m)A_G - f\ cos\alpha(Mg+mg\ ) - Mg\ sin\ \alpha$$

$$A_G > 0$$

شرط الحركة :

$$tg\alpha > \frac{2(Mg+mg)}{mg+2Mg}$$

شرط التدحرج:

$$F_{t1} < fN_1$$
$$sin\alpha - 8f\ cos\alpha < \frac{3}{4}\frac{A_G}{g}$$